Ejercicios

1. *Probar que las sucesiones* $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ *y* $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ *convergen a cero.*

2. *En cada uno de los siguientes casos, probar que la sucesión dada es convergente y calcula su límite:*

$(a)\ \left\{\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right\} \qquad (b)\ \left\{\frac{2n+5(-1)^n}{n+1}\right\} \qquad (c)\ \left\{\frac{(-1)^n n^2-3n+4}{n^3+1}\right\}$

3. *Identificar si las ssiguientes secuencias son crecientes, decrecientes o no monótonas.*

$(a)\ \left\{\frac{n}{2n+1}\right\} \qquad (b)\ \left\{\frac{1}{n}\right\} \qquad (c)\ \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

4. *Probar que toda sucesión divergente, o bien diverge positivamente, o bien admite una sucesión parcial que diverge negativamente.*

5. *Para cada una de las afirmaciones siguientes, da un ejemplo que verifique el enunciado o prueba que no existe tal ejemplo*

(a) *Una sucesión tal que ninguno de sus términos es* 0 *ni* 1, *pero que tiene una subsucesión convergente a* 0 *y a otra convergeente a* 1.

(b) *Una sucesión que no sea acotada pero que admite una subsucesión convergente.*

6. *Hallar el límite de las siguietes sucesiones: ;*

$(a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2+2n-9}{n^4} \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{7n^4-2n^2+3}{8n^4+3n^3-2} \qquad (c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{6n^5-8n^4-n}{9n^4-3n^2+1}$

7. *Dar un ejemplo de una sucesión que diverja positivamente y no sea creciente.*

8. *Probar que una sucesión* $\{x_n\}$ *diverge positivamente si, y sólo si, las sucesiones* $\{x_{2n-1}\}$ *y* $\{x_{2n}\}$ *diverge positivamente. ¿Qué ocurre con los otros tipos de divergencia?*

9. *Estudia la monotonía, la convergencia o divergencia y las cotas (si existen)*

$$(a)\ a_n = \frac{n+2}{2n-1} \quad (a)\ a_n = (-1)^{n-12^n} \quad (c)\ a_n = n! \quad (d)\ a_n = n^n$$

10. *Sean a_n y b_n dos sucesiones convergentes a l y m respectivamente. Prueba las siguientes propiedades:*

(a) $lim(a_n + b_n) = l + m$ $\qquad$ (b) $lim(a_n b_n) = lm$

(c) *Si m y b_n son distintos de cero, entonces* $lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{l}{m}$.

11. *Sea la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $x_1 = 1, x_2 = 3$ y $x_n = \frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}$ si $n \geq 3$. Observa si esta sucesión es de Cauchy y por lo tanto convergente.*

12. *Estudiar si las siguientes sucesiones son de Cauchy*

$$(a)\ a_n = \frac{3n^2+2n+1}{n^3+2} \qquad (b)\ b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \qquad (c)\ c_n = \frac{sen\ 1}{2} + \frac{sen\ 2}{2^2} + \cdots + \frac{sen\ n}{2^n}$$

13. *Si $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$, para $n \geq 1$ y $0 < x_1 < 1$. Pruebe que x_n es una sucesión decreciente con límite 0. Pruebe también que $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ converge hacia $1/2$.*

14. *Estudia la convergencia de las sucesiones siguientes.*

$$(a)\ x_n = \frac{2n+(-1)^n(n+2)}{7n+3} \qquad (b)\ x_n = n\left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n \qquad (c)\ x_n = n^2\left(\frac{1+n}{3n}\right)^2$$

15. *Dar dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de números reales no convergentes, tales que $\{x_n + y_n\}$ sea convergente.*

16. *Probar que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones de números reales acotadas, entonces la sucesiones $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$ están acotadas.*

17. $Probar\ que\ la\ sucesión\ de\ término\ general\ a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2}$

18. $Resuelva\ los\ siguientes\ límites\ al\ infinito.$

$(a)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{-3n^2-2x+5}{4x^2-4}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^3-4x+3}$ $\qquad (c)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1}-x$